

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

RELATÓRIO FINAL

Projeto de Pesquisa de Iniciação Científica

**A proposta de ensino de logaritmos em livros didáticos
atuais de Matemática**

Rafael Bonato Quintanilha

RA: 011184

Curso: Licenciatura em Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Ângela Miorim

Departamento de Metodologia de Ensino

julho de 2005

SUMÁRIO

Introdução.....	2
Abordagem Tradicional - tecnicista.....	8
Abordagem Problematizadora.....	12
Abordagem Híbrida.....	18
Considerações Finais.....	20
Referências Bibliográficas.....	22
Anexos – Tabelas Simplificadas das Análises.....	25

Introdução

Este Relatório apresenta os resultados de uma investigação que teve “o propósito de identificar e analisar as abordagens sobre logaritmos presentes em livros didáticos atuais” (Quintanilha, 2004, p.10). Para isso, em um primeiro momento, foram realizados o levantamento, a seleção e uma primeira leitura de textos que abordam aspectos relacionados à problemática da investigação, dentre os quais destacamos Lima (1991), PCN (1999), Miorim e Miguel (2002). Paralelamente, foi feito um trabalho de localização e seleção dos livros didáticos que fariam parte do estudo, no qual foram contemplados os 17 livros apresentados no quadro seguinte:

Nº	Autor	Título	Editora	Ano	Edição
1	Zampirolo, Maria José Couto de Vasconcellos; Scordamaglio, Maria Terezinha; Cândido, Suzana Laino	Matemática: Projeto Escola e Cidadania para Todos, vol. 1	Editadora do Brasil	2004	1ª
2	Guelli, Oscar	Matemática, Série Brasil	Editadora Ática	2003	1ª 1ª impr.
3	Nery, Chico; Trotta, Fernando	Matemática para o Ensino Médio, vol. único	Saraiva	2001	1ª 1ª impr.
4	Bosquilha, Alessandra; Corrêa, Marlene Lima Pires; Viveiro, Tânia Cristina Neto G.	Minimanual Compacto de Matemática: Teoria e Prática, vol. único	Editadora Rideel	2003	2ª
5	Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira	Matemática: Ensino Médio, vol. 1	Editadora Saraiva	2004	3ª refor. 2ª tirag.
6	Youssef, Antonio Nicolau; Fernandez, Vicente Paz; Soares, Elizabeth	Matemática: Ensino Médio, vol. único	Scipione	2000	1ª 7ª impr.
7	Paiva, Manoel	Matemática: Conceito, Linguagem e Aplicações, vol. 1	Editadora Moderna	2002	1ª
8	Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval	Curso de Matemática, vol. único	Editadora Moderna	2003/04	3ª rev. e ampl.
9	Paiva, Manoel	Matemática, vol. único	Editadora Moderna	2004	2ª
10	Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David; Périgo, Roberto	Matemática, vol. único	Editadora Atual	2002	2ª reimpr.
11	Santos, Carlos Alberto Marcondes; Gentil, Nelson; Greco, Sérgio Emílio	Matemática, Série Novo Ensino Médio, Edição Compacta, vol. único	Editadora Ática	2004	1ª 4ª impr.
12	Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto; Giovanni, José Ruy Jr.	Matemática Completa, vol. único	FTD	2002	-
13	Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto	Matemática, Uma Nova Abordagem, vol. 1, versão progressões	FTD	2000	-
14	Dante, Luís Roberto	Matemática, Contexto e Aplicações, vol. 1	Editadora Ática	2004	3ª 2ª impr.

15	Goulart, Márcio Cintra	Matemática no Ensino Médio, vol. 1	Editora Scipione	1999	1ª 1ª impr.
16	Machado, Antonio dos Santos	Matemática na Escola do 2º Grau, vol. 1	Editora Atual	1996	3ª reimpr.
17	Wilmer, Celso [et. al]	Telecurso 2000, Ensino Médio, Matemática, vol. 3	Editora Globo / FRM	2003	1ª

Em um momento posterior, após o estudo analítico de vários textos que discutem o tema livros didáticos, como Lopes (2000), Osório (1969), Pfromm Netto (1974), Lima (2001) e Edital PNLEM (2005), selecionamos as **categorias** que seriam utilizadas em nossa análise:

- **conceitualização**
- **seqüência dos temas**
- **história**
- **texto**
- **relações e integrações**
- **atividades**

O processo de análise foi iniciado através da leitura atenta de cada um dos 17 (dezessete) livros, tendo em vista identificar suas características individuais. Após a análise de todos os livros, sentindo a necessidade de ter uma visualização global das análises individuais realizadas, foi confeccionada uma primeira versão de uma tabela geral para cada uma das categorias de análise. Nessas tabelas foram colocadas, na íntegra, todas as observações feitas sobre cada livro. Essa versão da tabela foi simplificada, distribuindo as observações em itens específicos para que fosse possível uma melhor identificação final das abordagens. As tabelas simplificadas encontram-se em anexo.

A partir dessas tabelas, foi possível observar semelhanças e diferenças entre os livros e identificar características específicas de cada um deles, assim como algumas características contempladas por todos.

Uma característica percebida em muitos dos livros diz respeito à importância atribuída à interação dos logaritmos com as outras áreas do conhecimento, sendo mais frequentes, respectivamente, as interações com Economia (juros compostos), Biologia (crescimento de bactérias) e Física-Geologia (escala Richter).

Outra característica observada, que indica uma tendência atual, relaciona-se à linguagem visual presente no tópico logaritmo. A maior parte dos livros que apresentam

uma grande quantidade de gráficos e figuras explicativas privilegia a relação do logaritmo com a função exponencial. Podemos dizer que esses livros utilizam a *concepção algébrico-funcional*, que começa a surgir na matemática escolar brasileira nas últimas décadas do século XX, como observado por Miorim e Miguel (2002):

“A partir do início da década de 70 do Século XX, um outro papel começou a ser desempenhado por eles na cultura escolar brasileira. Associada à exponencial, não mais os logaritmos enquanto números, mas a *função logarítmica* começa a desempenhar um papel importante no estudo de situações que envolvem determinados tipos de variações entre grandezas. Em outras palavras, uma nova concepção dos logaritmos, que denominaremos algébrico-funcional, se torna prevaiente na cultura escolar brasileira” (Miorim e Miguel, 2002, p. 75).

Em relação aos tipos de atividades desenvolvidas pelos livros nos capítulos reservados ao estudo dos logaritmos, ainda é possível perceber uma forte influência da “pedagogia tecnicista”. Essa “pedagogia” era, e ainda é, muito utilizada em cursos pré-vestibulares que têm a intenção de conseguir em um curto espaço de tempo fazer com que o aluno seja capaz de dar respostas corretas a questões típicas de vestibulares. As características dessa tendência são apresentadas por Fiorentini (1995) no fragmento seguinte:

“Muitos cursinhos pré-vestibulares e alguns concursos vestibulares (...) reforçam este tipo de ensino (tecnicista). De fato, estes enfatizam apenas questões ou atividades, explorando unicamente: 1º) a memorização de princípios e fórmulas; 2º) habilidades de manipulação de algoritmos ou de expressões algébricas; 3º) habilidades na resolução de problemas-tipo. De fato, raramente aparecem questões exigindo do aluno explicações, ilustrações, construção de modelos matemáticos que descrevam situações-problema, análises, justificações ou deduções” (Fiorentini, 1995, p. 17).

A análise da “tabela de atividades” nos confirma a existência dessa visão tecnicista associada à preocupação com a preparação para o vestibular, uma vez que, além das atividades propostas durante o texto privilegiarem os três elementos mencionados por Fiorentini (1995), muitos livros trazem uma quantidade maior de exercícios complementares direcionados ao vestibular, incluindo muitos daqueles já presentes em vestibulares anteriores.

Com relação à presença de elementos históricos, podemos perceber que esse item é pouco contemplado pelos livros, apesar de termos identificado que em apenas dois, dos 17 livros, não existe nenhuma referência à História: *Matemática, Série Novo Ensino Médio*, Edição Compacta de Santos, Gentil e Greco e *Matemática Completa* de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. Além disso, na maioria das vezes em que a História aparece, ela não está integrada ao texto principal. Em alguns livros, por exemplo, existe um texto histórico que inicia o capítulo. Entretanto, esse texto parece ter apenas a função de “motivar” o aluno na introdução do tema, mas não se articula ao texto principal.

A categoria “seqüência dos temas”, ao contrário do que esperávamos e das outras categorias, não nos trouxe elementos novos para a análise. Isso ocorreu pelo fato de termos identificado que essa seqüência é muito variada, não existindo uma seqüência predominante, e que não são estabelecidas relações com o tema logaritmo.

Com relação ao tema anterior, identificamos a tendência de serem colocados temas relacionados à exponencial - função, equação e inequação exponencial – e à potência. Ou seja, existe uma tentativa de estabelecer uma relação entre os logaritmos e esses temas.

Com relação ao tema posterior, no entanto, encontramos oito variações - porcentagem, progressões, trigonometria, funções circulares, função modular, composição e inversão de funções, matemática financeira e unidades de volume – e, em nenhuma delas, é estabelecida qualquer relação com os logaritmos.

Essa não relação dos logaritmos com o tema posterior vem contradizer a proposta defendida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, que afirmam ser importante o estabelecimento de relações entre os vários temas matemáticos que são tratados no Ensino Médio, como uma maneira de evitar a fragmentação do conhecimento matemático e possibilitar ao aluno uma maior compreensão e significação do conhecimento matemático, uma vez que:

“se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos mostram claramente que isso não é verdade” (PCN, 1999, p. 255)”

Se considerarmos a constituição histórica dos logaritmos na cultura escolar brasileira, podemos analisar que a “ruptura” existente atualmente entre os logaritmos e outros temas está diretamente relacionada ao movimento das concepções historicamente produzidas.

Em um momento inicial prevaleceu, no período de 1856 a 1912, em nosso ensino a *concepção aritmética de logaritmo*. Essa concepção estabelecia uma conexão direta com progressões aritméticas e geométricas. Associada diretamente à necessidade de facilitar cálculos extensos, ela articula-se diretamente com a trigonometria. Em um momento posterior, temos a *concepção algébrico-funcional* estabelecendo novas conexões:

(...) o tema, juntamente com progressões, juros compostos equações exponenciais e outras aplicações, é antecedido por tópicos de álgebra e de cálculo diferencial e integral, e sucedido imediatamente pelo estudo da função exponencial. É neste momento que é introduzido, pela primeira vez nos programas um tópico específico sobre a **Função Exponencial**. Nos programas seguintes, este tema será sempre contemplado e terá seu desenvolvimento vinculado ao da Função Logarítmica, a partir da Reforma Francisco Campos. (...) A partir da segunda metade da década de 60 do século XX, por influência do movimento da matemática moderna, de inspiração bourbakista, a concepção algébrico-funcional de logaritmo, concebido tanto como operação inversa da potenciação quanto como função inversa da exponencial, passa a ser tratada de forma mais rigorosa e numa mesma série. Além disso, as funções exponencial e logarítmica não mais aparecem diretamente conectadas nem com a teoria das progressões e nem com noções de geometria analítica e de cálculo diferencial e integral mas passam a ser tratadas em capítulo independente. Reforça-se, entretanto, a ligação dos logaritmos com o tema funções, de modo que eles passam a ser vistos e tratados como casos particulares de funções (Miorim e Miguel, 2002).

A análise das categorias selecionadas, além desses aspectos gerais mencionados, levaram à identificação de grupos de livros que apresentavam características em comum, ou seja, que poderiam ser considerados como tendo uma mesma abordagem. A principal categoria que auxiliou na identificação das abordagens foi a **categoria conceitualização**. Nessa categoria foi possível perceber a existência de diversos caminhos trilhados pelos autores para o desenvolvimento do tema, ou seja, como o assunto é tratado, quais e como as definições são apresentadas e relacionadas com os exercícios e problemas. Essa análise nos levou à identificação de três abordagens, que denominamos:

- **Abordagem Tradicional - tecnicista**
- **Abordagem Problematizadora**
- **Abordagem Híbrida**

Abordagem Tradicional - tecnicista - tecnicista

Consideramos nessa abordagem os livros que, apesar de apresentarem uma linguagem acessível e dirigida ao leitor/aluno, não possibilitam uma maior participação deste. Isso ocorre pelo fato da participação do aluno acontecer apenas através da resolução de exercícios e exemplos em sua maior parte manipulativos - aplicações computacionais de regras e propriedades. Associado diretamente a isso, esses livros que apresentam poucos ou nenhum desenho ou figura ilustrativa, além de utilizarem pequenos trechos históricos geralmente não articulados ao texto principal.

Foram contemplados nessa categoria os oito seguintes livros: Nery, Chico; Trotta, Fernando. *Matemática para o Ensino Médio*, 2001; Youssef, Antonio Nicolau; Fernandez, Vicente Paz; Soares, Elizabeth. *Matemática: Ensino Médio*, 2000; Santos, Carlos Alberto Marcondes; Gentil, Nelson; Greco, Sérgio Emílio. *Matemática, Série Novo Ensino Médio*, Edição Compacta, 2004; Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto; Giovanni, José Ruy Jr. *Matemática Completa*, 2002; Guelli, Oscar. *Matemática, Série Brasil*, 2003; Bosquilha, Alessandra; Corrêa, Marlene Lima Pires; Viveiro, Tânia Cristina Neto G. *Minimanual Compacto de Matemática: Ensino Médio, Teoria e Prática*, 2003; Goulart, Márcio Cintra. *Matemática no Ensino Médio*, 1999; Machado, Antonio dos Santos. *Matemática na Escola do 2º Grau*, 1996.

Mostramos, a seguir, dois fragmentos que contemplam as características mencionadas anteriormente.

Logaritmos: Conseqüências da definição

Da definição e das condições de existência do logaritmo, podemos concluir:

- a) $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$; por exemplo:
 $\log_{10} 1 = 0 \Rightarrow 10^0 = 1$
- b) $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$; por exemplo:
 $\log_8 8 = 1 \Rightarrow 8^1 = 8$
- c) $\log_b b^m = m$, pois $b^m = b^m$; por exemplo:
 $\log_5 5^4 = 4 \Rightarrow 5^4 = 5^4$
- d) $b^{\log_b a} = a$, pois, sendo $\log_b a = x$, $b^x = a$; por exemplo:
 $2^{\log_2 8} = 8$ ($\log_2 8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$)

Exercícios resolvidos

1. Calcule, aplicando a definição de logaritmo:

- a) $\log_3 81$
- b) $\log_2 0,25$
- c) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{4}$

Solução:

- a) $\log_3 81 = y \Rightarrow 3^y = 81 = 3^4 \Rightarrow y = 4$
 Então, $\log_3 81 = 4$.
- b) $\log_2 0,25 = \log_2 \frac{25}{100} = \log_2 \frac{1}{4} = y \Rightarrow 2^y = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} \Rightarrow y = -2$
 Então, $\log_2 0,25 = -2$.
- c) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{4} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$
 Portanto, $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{4} = -\frac{2}{3}$.

2. Calcule as bases dos logaritmos a seguir:

- a) $\log_a 5 = -1$
- b) $\log_a \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$
- c) $\log_x \sqrt[3]{2} = \frac{1}{2}$

Solução:

- a) Pela definição de logaritmo, temos:
 $\log_a 5 = -1 \Rightarrow a^{-1} = 5 \Rightarrow \frac{1}{a} = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$

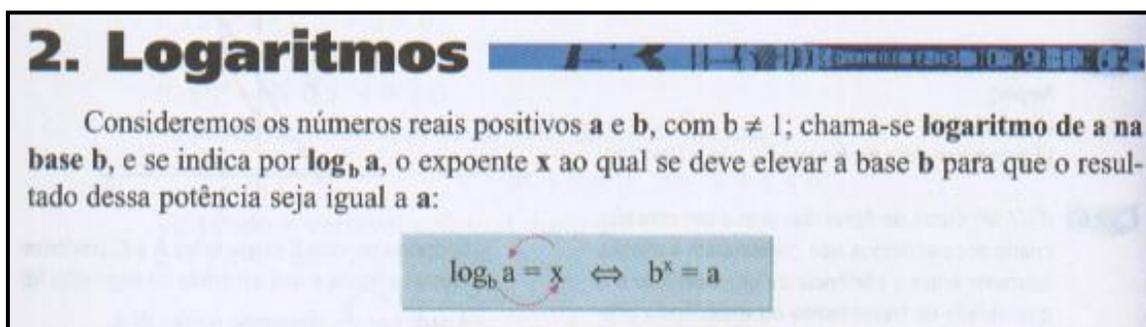
75. Resolva as inequações:
- a) $\log_2 (2x - 5) > 0$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{3}{4} \right) < 2$ c) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) < -1$ d) $\log_4 (x - 3) < 1$
76. Resolva as inequações:
- a) $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x - 3) < \log_3 2$ b) $\log_{10} (x + 3) + \log_{10} x > 1$
77. (Fatec-SP) Qual é o conjunto verdade da inequação $\log (x + 2) - \log (x - 1) > \log 2$?
78. Resolva a inequação $2 \log_3 (x + 2) - \log_3 (3x + 1) > 0$.
79. (Fuvest) É dada a função f definida por $f(x) = \log_2 x - \log_4 (x - 3)$.
- a) Determine os valores de x para os quais $f(x) \leq 2$.
- b) Determine os valores de x para os quais $f(x) > 2$.
80. Sendo $0 < a < 1$, resolva a inequação (na incógnita x) $\log_a x - \log_{a^2} (2 - 3x) < 0$.
81. Resolva a inequação $\log_a (2x - 3) > 0$, onde a é uma constante positiva e distinta de 1.

(Goulart, 1999, p. 240)

Apesar dessas características gerais alguns elementos mostram-se diferenciados. Destacamos, especialmente: definição direta; ausência de história e situações-problema.

Com relação à **definição direta**, observamos que alguns livros apresentam a definição logo na introdução do tema, sem nenhuma introdução ao tema. Nesse caso, encontram-se os livros: Nery, Chico; Trotta, Fernando. *Matemática para o Ensino Médio*, 2001 e Youssef, Antonio Nicolau; Fernandez, Vicente Paz; Soares, Elizabeth. *Matemática: Ensino Médio*, 2000.

A imagem apresentada abaixo ilustra a forma como o livro de Nery e Trotta (2001), iniciam o tema logaritmos.



(Nery e Trotta, 2001, p. 170)

Alguns livros dessa categoria não apresentam nenhuma referência a questões históricas, ou seja, nesses livros existe a **ausência da história**. Esses livros são: Santos,

Carlos Alberto Marcondes; Gentil, Nelson; Greco, Sérgio Emílio. *Matemática, Série Novo Ensino Médio*, Edição Compacta, 2004; Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto; Giovanni, José Ruy Jr. *Matemática Completa*, 2002.

Podemos destacar aqui uma contradição entre livros diferentes de mesmos autores: enquanto o livro *Matemática, uma nova abordagem* (2000), de Giovanni e Bonjorno traz a História da Matemática problematizada e integrada ao texto principal, o livro *Matemática completa* (2002), mais recente e dos mesmos autores, não traz nenhuma menção sobre a História da Matemática.

Apesar de estarmos considerando os livros da categoria denominada tradicional - tecnicista, merece ser destacado que alguns deles apresentam algumas poucas **situações-problema** distribuídas em exercícios. Em geral, os problemas são apresentados em forma indireta, ou seja, são apresentados em exercícios propostos entre o texto principal ou em exercícios opcionais, normalmente ao final do texto principal. Os livros que apresentam algumas situações-problema dessa forma são: Guelli, Oscar. *Matemática, Série Brasil*, 2003; Bosquilha, Alessandra; Corrêa, Marlene Lima Pires; Viveiro, Tânia Cristina Neto G. *Minimanual Compacto de Matemática: Ensino Médio, Teoria e Prática*, 2003; Goulart, Márcio Cintra. *Matemática no Ensino Médio*, 1999; Machado, Antonio dos Santos. *Matemática na Escola do 2º Grau*, 1996.

A ilustração a seguir mostra algumas situações-problema do livro de Machado (1996). Esses problemas encontram-se na seção “Quebra-Cuca” em forma de desafios. Merece ser observado que dos quatro problemas apresentados, três são exercícios propostos em vestibulares anteriores, o que nos leva a concluir o motivo da presença desses em um livro categorizado com uma abordagem tradicional - tecnicista. Ou seja, só são apresentados no livro problemas que foram propostos em vestibulares.

4. (FUVEST-SP) Demonstre: $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.
5. Partindo de uma quantidade inicial de Q_0 bactérias de uma dada espécie, após t horas a quantidade existente é $Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt}$, em que k é uma constante. Se a quantidade inicial dobrar em 1 hora, quanto tempo levará para obtermos 1 000 000 de bactérias partindo de uma quantidade inicial de 1 000 bactérias? Dado $\log 2 = 0,3$.
6. (PUC-RJ)
- No crescimento exponencial $f(t) = c \cdot e^{kt}$, verifique que o valor da função no ponto médio de um intervalo qualquer é a média geométrica dos valores nos extremos desse intervalo.
 - A população mundial em 1950 era de 2,6 bilhões e em 1975 era de 4 bilhões. Admitindo o crescimento exponencial, estime a população no ano 2000.
7. (UNICAMP-SP) Considere que certo país troca de moeda cada vez que a inflação acumulada atinge a cifra de 900%. A nova moeda vale sempre 1 000 vezes a antiga. Com uma inflação de 25% ao mês, em quantos meses esse país trocará de moeda? Use $\log_{10} 2 = 0,301$.
8. (PUC-SP) Uma calculadora eletrônica possui as teclas das quatro operações fundamentais e as teclas 10^x , LOG_{10} e LOG_e . Como se pode obter o valor de e usando as funções da calculadora?

(Machado, 1996, p. 160)

Abordagem Problematizadora

Ao contrário da abordagem tradicional - tecnicista, consideramos na **abordagem problematizadora** os livros que enfatizam a construção do conceito pelo leitor/aluno através da participação do mesmo no texto principal, que trazem a definição de logaritmo por meio de uma situação-problema, que apresentam textos complementares contextualizados dispostos no início, meio ou final do capítulo, que estabelecem integrações com outras áreas do conhecimento e relações com outros temas da matemática.

Os livros catalogados neste tipo de abordagem buscam seguir as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais à medida que fazem com “que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir

novos conceitos e estruturas a partir de outros conceitos e estruturas que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas” (PCN, 1999, p. 252).

Também é possível afirmar que essa abordagem relaciona-se diretamente com o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio, que sugere que o livro deve contemplar “dois eixos norteadores das práticas pedagógicas (...) a interdisciplinaridade e a contextualização” (Edital PNLEM –2005, p. 9).

Foram contemplados nessa categoria os seis seguintes livros: Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto. *Matemática, Uma Nova Abordagem*, 2000; Dante, Luís Roberto. *Matemática, Contexto e Aplicações*, 2004; Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria. *Matemática: Ensino Médio*, 2003; Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval. *Curso de Matemática*, 2003/04; Zampirolo, Maria José Couto de Vasconcellos; Scordamaglio, Maria Terezinha; Cândido, Suzana Laino. *Matemática: Projeto Escola e Cidadania para Todos*, 2004; Wilmer, Celso [et. al]. *Telecurso 2000, Ensino Médio, Matemática*, vol. 3, 2003.

EXERCÍCIOS EXERCÍCIOS EXERCÍCIOS EXERCÍCIOS

111 Uma amostra de certo material radioativo reduz-se a $\frac{3}{5}$ de sua quantidade inicial depois de 3 000 anos. Qual é a meia-vida do material radioativo?

112 Na caverna de Lascaux, na França, famosa pelas notáveis pinturas feitas em suas paredes por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade do C era 0,145 vezes a radioatividade normalmente encontrada num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão encontrado na caverna e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas. (Extraído de *Logaritmos*, Elon Lages Lima, SBM, Coleção do Professor de Matemática, Fev./91)

Caverna de Lascaux, França
As pinturas da caverna de Lascaux têm 17 000 anos e foram encontradas em 1942.



(Giovanni, Bonjorno, 2000, p. 301)

Unidade 8

Logaritmo e função logarítmica

1. Logaritmo

Vamos voltar ao problema do último **Flash matemático** da Unidade 7 (página 204) sobre uma planta que inicialmente media 1 cm e cuja altura dobrava a cada mês.

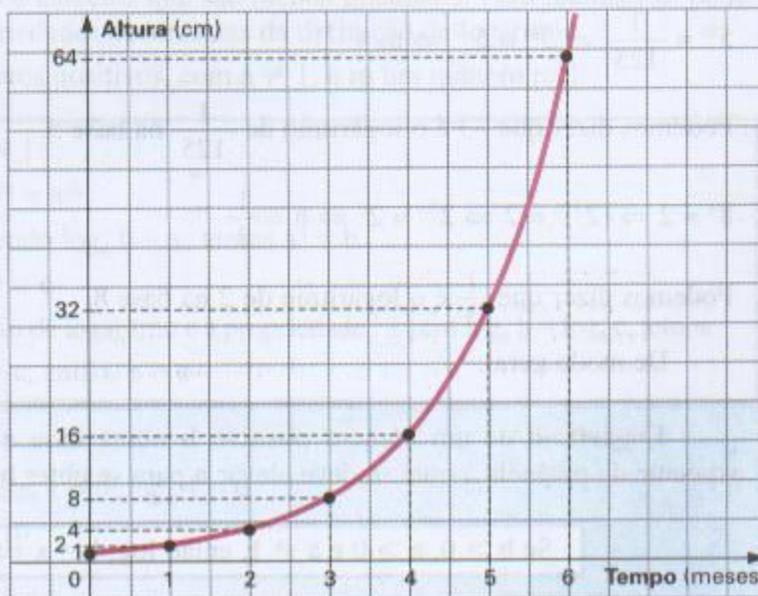
Com o que aprendemos na última unidade, podemos saber a altura da planta em cada momento. No entanto, queremos propor a seguinte questão: Após quanto tempo a planta terá 9 cm de altura?

Retomemos a tabela e o gráfico da função exponencial correspondente:



TONY STONE

Tempo (meses)	Altura (cm)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64



Observamos que responder à questão proposta significa resolver a equação exponencial $2^x = 9$ cm.

Já resolvemos equações exponenciais anteriormente, como por exemplo $2^x = 8$. Em quase todas elas, usávamos recursos para resolução que transformavam cada lado da igualdade em potências de mesma base, depois, então, “igualávamos” os expoentes. Mas em $2^x = 9$ parece não ser possível fazer isso.

Apesar de todos os livros pertencentes à abordagem problematizada possuírem características semelhantes, foi possível identificar alguns livros que exploram mais algumas dessas características.

Alguns livros exploram mais intensamente as **integrações** da matemática com outras áreas do conhecimento, ou seja, apresentam exemplos de integrações diferentes dos tradicionais juros compostos, crescimento de bactérias e escala Richter. Nesses livros encontramos, por exemplo, as seguintes situações integradoras: linha de produção; meio ambiente; desintegração de substâncias; meia vida de uma substância radioativa, de um remédio, etc.; crescimento populacional; pH de substâncias químicas; alometria; etc.

Merece ser destacado que as formas mais freqüentes com que as integrações aparecem nesses livros são de forma direta (em exemplos e exercícios resolvidos, fazendo parte do texto principal) e de forma indireta no texto, como exercícios propostos entre partes do texto.

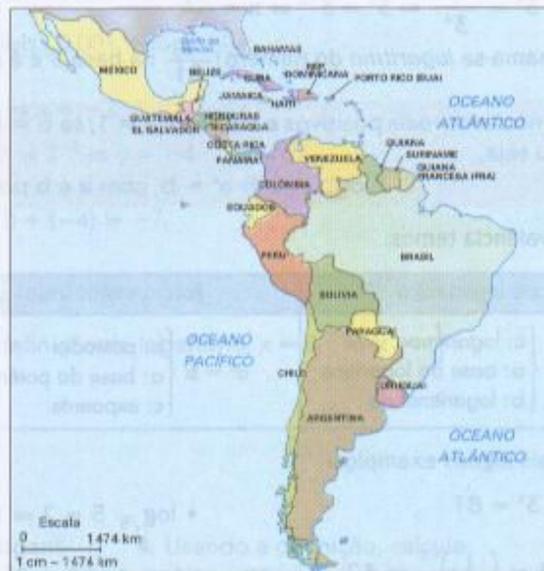
Os livros que enfatizam as integrações são: Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto. *Matemática, Uma Nova Abordagem*, 2000; Dante, Luís Roberto. *Matemática, Contexto e Aplicações*, 2004.

Na próxima figura, apresentamos a introdução do capítulo de logaritmos do livro de Dante que traz uma situação-problema que integra os logaritmos com o crescimento populacional da América Latina.

Essa integração, além do elemento motivador, será utilizada para o autor dar continuidade ao estudo dos logaritmos. A solução desse problema leva à necessidade de resolução de uma equação exponencial que será utilizada para o autor definir os logaritmos. Além dessa integração, em um momento posterior, o problema é retomado em um exercício resolvido.

Logaritmo e função logarítmica

1. Logaritmo



Fonte: Adaptado de SIMIELLI, M. E. Geociências. São Paulo, Ática, 1998

Na América Latina, a população cresce a uma taxa de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina irá dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Nessas condições, podemos organizar o seguinte quadro:

Tempo	População
Início	P_0
1 ano	$P_1 = P_0 \cdot 1,03$
2 anos	$P_2 = (P_0 \cdot 1,03)1,03 = P_0(1,03)^2$
3 anos	$P_3 = P_0(1,03)^3$
⋮	⋮
x anos	$P_x = P_0(1,03)^x$

Para Refletir

$$\begin{aligned} 100\% + 3\% &= 103\% = \\ &= \frac{103}{100} = 1,03 \end{aligned}$$

Supondo que a população dobrará após x anos, temos:

$$P_x = 2P_0$$

(Dante, 2004, p. 225)

Um outro elemento que merece ser destacado diz respeito às relações estabelecidas, pelos livros dessa abordagem, entre logaritmos e outros temas matemáticos. Na maior parte dos livros, os autores estabelecem apenas uma relação: entre logaritmos e potenciação ou entre logaritmos e exponencial. Em apenas dois livros - Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria. *Matemática: Ensino Médio*, 2003 e Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval. *Curso de Matemática*, 2003/04 - é possível perceber o estabelecimento de relações simultâneas entre os logaritmos, a potenciação e a exponencial, como podemos observar na figura abaixo, extraída do livro *Curso de Matemática* de Bianchini e Paccola.

Definição de logaritmo

Considere as questões que seguem.

a) A que expoente devemos elevar o número 2 para obtermos o número 8?
A questão fica resolvida se calcularmos o valor de x na equação $2^x = 8$. Assim, temos:
 $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$, pois $2^3 = 8$
O número 3, expoente que se deve elevar a base 2 para que se obtenha o número 8, é o logaritmo de 8 na base 2 e se escreve $\log_2 8 = 3$.

b) A que expoente devemos elevar o número 3 para obtermos o número 243?
A questão fica resolvida quando calculamos o valor de x na equação $3^x = 243$. Assim, temos: $3^x = 243 \Rightarrow x = 5$, pois $3^5 = 243$
O número 5, expoente que se deve elevar a base 3 para se obter o número 243, é o logaritmo de 243 na base 3 e se escreve $\log_3 243 = 5$.

Essas questões nos mostram que o logaritmo de um número positivo, numa certa base positiva e diferente de 1, é o expoente ao qual se deve elevar a base, de modo a se obter o número.

De modo geral:

Chama-se de **logaritmo de b na base a** o número real x tal que $a^x = b$, com a e b positivos e $a \neq 1$.
Indicamos que x é o logaritmo de b na base a , escrevendo: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(Bianchini e Paccola, 2003/04, p. 133)

Alguns livros, ainda, trazem a maior parte das atividades em forma de exercícios-problema no interior do texto central. Os livros que possuem esta característica são: Zampirolo, Maria José Couto de Vasconcellos; Scordamaglio, Maria Terezinha; Cândido, Suzana Laino. *Matemática: Projeto Escola e Cidadania para Todos*, 2004; Wilmer, Celso [et. al]. *Telecurso 2000, Ensino Médio, Matemática*, vol. 3, 2003.

Gostaríamos de destacar especialmente o livro do Telecurso 2000, por possuir um capítulo destinado somente a problemas com logaritmos. Esse capítulo é intitulado “Resolvendo problemas com logaritmos” e enfatiza a importância dos logaritmos em situações reais. Apresentamos na figura a seguir um exemplo relacionado resfriamento da temperatura da água em função do tempo.

Exercício 7.
Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30°C. Sobre um fogão havia uma panela com água fervendo e, em certo momento, o fogo foi apagado. A partir das informações que daremos a seguir, calcule que temperatura terá essa água 10 minutos depois que o fogo foi apagado.
Informações: A temperatura da água que se resfria obedece à seguinte equação:
$$t - a = (b - a) \cdot 10^{-0,06n}$$

Os significados das letras são os seguintes:
n = tempo de resfriamento em minutos.
a = temperatura do ambiente.
b = temperatura da água no início.
t = temperatura da água após o tempo de resfriamento.
Substitua os valores dados na equação: a = 30, b = 100 e n = 10. Aplique o logaritmo para calcular a temperatura da água.

(Wilmer, 2003, p. 153)

Abordagem Híbrida

Neste tipo de abordagem contemplamos os livros que apresentam tanto características da abordagem **tradicional - tecnicista** quanto da **problematizadora**. Ou seja, são livros que ao nosso ver, não se identificam com uma única abordagem, mas utilizam características de várias delas. São livros que, por um lado, parecem seguir a abordagem tradicional - tecnicista ao apresentar definições e propriedades seguidas de exemplos e exercícios propostos. Por outro lado, entretanto, esses livros ao incluírem situações-problema (em exercícios) e textos complementares, parecem estar próximos a uma abordagem mais problematizadora. Ou seja, podemos considerar que são textos

híbridos que ainda não definiram uma orientação pedagógica. Nesta categoria incluímos os seguintes livros: Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David; Périgo, Roberto. *Matemática*, 2002; Paiva, Manoel. *Matemática: Conceito, Linguagem e Aplicações*, 2002; Paiva, Manoel. *Matemática*, 2004.

Um bom exemplo dessa abordagem são os livros de Paiva. Apesar de incluir textos complementares informativos, que apresentam aplicações interessantes, a falta de qualquer articulação com o texto principal e a ausência de questões que poderiam ser discutidas pelos alunos, faz com que tais textos sejam meramente informativos e curiosos, e não contribuam de nenhuma forma para a construção de conceitos e significados pelo aluno.

Um exemplo dessa abordagem é representado pela próxima figura.

tido" (\geq) para os logaritmandos, pois a base $\frac{1}{2}$ está entre 0 e 1. Ou seja:

$$\log_{\frac{1}{2}} 5(4x - 1) \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(4x - 1) \geq \frac{1}{4} \text{ ou seja, } 20(4x - 1) \geq 1$$

Portanto: $x \geq \frac{21}{80}$

O conjunto solução S da inequação proposta é a interseção do conjunto S' dos reais x tais que $x \geq \frac{21}{80}$, com o conjunto S'' dos reais x que satisfazem a C.E. $x > \frac{1}{4}$. Isto é:

Assim, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{21}{80} \right\}$

ATIVIDADE

25 Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

- $\log_5 (2x - 8) > 2$
- $\log_{\frac{1}{3}} (x - 2) \leq -1$
- $\log_2 (3x - 6) > \log_2 (6 - x)$
- $\log_{0,5} (5x - 1) \geq \log_{0,5} (5 - 2x)$
- $\log_2 5 + \log_2 (2x + 1) < 3$
- $\log_{\frac{1}{3}} (6x - 1) - \log_{\frac{1}{3}} 4 \leq 2$

Exercícios complementares 57 e 58

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Os terremotos

Abandonando um pequeno dado sobre a superfície terrestre, ocorrerá uma liberação de energia que fará a superfície vibrar levemente. Se, no lugar do dado, for abandonado um tijolo, a energia liberada fará vibrar mais intensamente essa superfície. Imagine um cubo de granito com 2 km de aresta abandonado de uma altura de 280 km: a energia liberada será equivalente a 20 trilhões de kWh (quilowatt-hora). Essa foi a medida da energia liberada pelo terremoto ocorrido em São Francisco, Califórnia, em 1906. Mais violento ainda foi o terremoto que arrasou Lisboa em 1755, liberando energia equivalente a 350 trilhões de kWh.

Uma das aplicações dos logaritmos é na medida da intensidade de um terremoto. Na escala Richter, a intensidade I de um terremoto é definida por:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0}$$

em que E é a energia liberada pelo terremoto, em kWh, e $E_0 = 10^8$ kWh.

O terremoto ocorrido em 1906, na cidade de São Francisco (EUA), registrou 9 pontos na escala Richter.

Considerações Finais

Após a identificação das três abordagens - tradicional - tecnicista, problematizadora e híbrida – e analisando o total de livros contemplados em cada uma delas (Quadro 1), pudemos chegar a algumas conclusões.

Apesar dos Parâmetros Curriculares Nacionais e dos Programas Nacionais do Livro Didático orientarem para uma abordagem mais problematizadora e contextualizada, enfatizando dessa forma a busca pela interdisciplinaridade e relações entre tópicos matemáticos, nota-se que, ainda, a maioria dos livros analisados apresentam uma abordagem tradicional – tecnicista.

Essa permanência de uma abordagem tradicional-tecnicista pode ser entendida como uma “tradição” existente, especialmente no Ensino Médio, de preparar o aluno para o vestibular e não para uma formação geral. Na verdade, essa questão tem sido colocada nas discussões acerca do ensino de matemática brasileiro desde o momento em que foram criados os cursos superiores, antes mesmo de termos uma estrutura organizada do ensino fundamental e médio.

Além disso, devemos considerar que a primeira avaliação de livros didáticos para o Ensino Médio ocorreu no ano de 2004, ou seja, não houve tempo ainda para os autores reformularem seus textos.

Entretanto, já é perceptível que vários livros já estão se “adequando” às novas orientações, uma vez que seis dos livros analisados por nós já contemplam solicitações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e do Programa Nacional Livro Didático para o Ensino Médio.

Talvez essas novas orientações possam também ser encaradas como responsáveis pela existência dos livros contemplados na categoria híbridos. Possivelmente, os autores dessa categoria estejam fazendo um movimento no sentido de se aproximarem dessas novas exigências, embora ainda tenham dificuldade para concretizá-las.

Essa análise nos leva a acreditar que estamos em um momento de mudança de abordagens e de existência de uma tendência em fortalecer a abordagem problematizadora.

Por outro lado, entretanto, devido à forte relação ainda existente entre Ensino Médio e o vestibular, acreditamos que a abordagem tradicional permanecerá ainda durante muito tempo em muitos textos.

Na verdade, podemos dizer que com relação ao Ensino Médio existe uma tensão entre o que os documentos oficiais propõem e a maneira como as escolas de Ensino Médio respondem às exigências dos vestibulares.

Quadro 1

TRADICIONAL-TECNICISTA	PROBLEMATIZADORA	HÍBRIDA
- Nery, Chico; Trotta, Fernando. Matemática para o Ensino Médio, 2001.	- Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto. Matemática, Uma Nova Abordagem, 2000.	- Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David; Périgo, Roberto. Matemática, 2002.
- Youssef, Antonio Nicolau; Fernandez, Vicente Paz; Soares, Elizabeth. Matemática: Ensino Médio, 2000.	- Dante, Luís Roberto. Matemática, Contexto e Aplicações, 2004.	- Paiva, Manoel. Matemática: Conceito, Linguagem e Aplicações, 2002.
- Santos, Carlos Alberto Marcondes; Gentil, Nelson; Greco, Sérgio Emilio. Matemática, Série Novo Ensino Médio, Edição Compacta, 2004.	- Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria. Matemática: Ensino Médio, 2003.	- Paiva, Manoel. Matemática, 2004.
- Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto; Giovanni, José Ruy Jr. Matemática Completa, 2002.	- Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval. Curso de Matemática, 2003/04.	
- Guelli, Oscar. Matemática, Série Brasil, 2003.	- Zampirolo, Maria José Couto de Vasconcelos; Scordamaglio, Maria Terezinha; Cândido, Suzana Laino. Matemática: Projeto Escola e Cidadania para Todos, 2004.	
- Bosquilha, Alessandra; Corrêa, Marlene Lima Pires; Viveiro, Tânia Cristina Neto G. Minimanual Compacto de Matemática: Ensino Médio, Teoria e Prática, 2003.	- Wilmer, Celso [et. al]. Telecurso 2000, Ensino Médio, Matemática, vol. 3, 2003.	
- Goulart, Márcio Cintra. Matemática no Ensino Médio, 1999.		
- Machado, Antonio dos Santos. Matemática na Escola do 2º Grau, 1996.		

Referências Bibliográficas

- BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Curso de Matemática**, vol. Único. São Paulo: Moderna, 2003/04.
- BOSQUILHA, Alessandra; CORRÊA, Marlene Lima Pires; VIVEIRO, Tânia Cristina Neto G.. **Minimanual Compacto de Matemática: Teoria e Prática**, vol. Único. São Paulo: Rideel, 2003.
- BRASIL, **Editais de convocação para inscrição de livros didáticos no processo de avaliação e seleção de obras a serem incluídas no catálogo do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio: PNLEM/2005: Matemática**. Brasília: MEC, SEMTEC, FNDE, 2004.
- BRASIL, Ministério de Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999.
- DANTE, Luís Roberto. **Matemática, Contexto e Aplicações**, vol. 1. São Paulo: Ática, 2004.
- FIORENTINI, Dario. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Campinas, n. 4 p. 1 - 34, ano 3,1995.
- GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática, Uma Nova Abordagem**, vol. 1, versão progressões. São Paulo: FTD, 2000.
- GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy Jr.. **Matemática Completa**, vol. único. São Paulo: FTD, 2002

GOULART, Márcio Cintra. **Matemática no Ensino Médio**, vol. 1. São Paulo: Scipione, 1999.

GUELLI, Oscar. **Matemática**, Série Brasil. São Paulo: Ática, 2003.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Matemática**, vol. único. São Paulo: Atual, 2002.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática na Escola do 2º Grau**, vol. 1. São Paulo: Atual, 1996.

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Natal: SBHMat, 2002. (Série Textos de História da Matemática; v. 9)

NERY, Chico; TROTTA, Fernando. **Matemática para o Ensino Médio**, vol. Único. São Paulo: Saraiva, 2001.

PAIVA, Manoel. **Matemática**, vol. único. São Paulo: Moderna, 2004

PAIVA, Manoel. **Matemática: Conceito, Linguagem e Aplicações**, vol. 1. São Paulo: Moderna, 2002

QUINTANILHA, Rafael B. **Projeto de Pesquisa de Iniciação Científica: A proposta de ensino de logaritmos em livros didáticos atuais de Matemática**. Campinas, 2004.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática, Série Novo Ensino Médio**, Edição Compacta, vol. único. São Paulo: Ática, 2004

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**, vol. 1. São Paulo: Saraiva, 2004

WILMER, Celso [et. al]. **Telecurso 2000**, Ensino Médio, Matemática, vol. 3. São Paulo: Globo/FRM, 2003.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; FERNANDEZ, Vicente Paz; SOARES, Elizabeth.
Matemática: Ensino Médio, vol. único. São Paulo: Scipione, 2000.

ZAMPIROLLO, Maria José Couto de Vasconcellos; SCORDAMAGLIO, Maria Terezinha;
CÂNDIDO, Suzana Laino. **Matemática**: Projeto Escola e Cidadania para Todos,
vol. 1. São Paulo: Brasil, 2004.

Atividades – livros x tópicos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1		X			X			X		X			X	X		X	
2		X+	X+	X	X		X	X	X	X	X	X	X+	X+	X	X	
3		X	X			X	X	X	X			X	X	X	X	X	
4		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5	X	X-		X									X	X	X	X	X
6		X			X	X							X	X			

TÓPICOS

- 1 – Desafios
 2 – Vestibular
 3 – Optativos (complementares)
 4 – Manipulativos (computacionais)
 5 – Situações-problema
 6 – Construção de gráficos
obs: + e – indicam predominância ou não

História – livros x tópicos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1					I					I			I			I	I
2	L1	L2 L6	L2	L1	L2	L4	L1	L1	L1	L2			L1	L3	L2 L6	L2 L3	L1
3	T2	T1 T2 T3	T1	T2	T2 T3	T1	T2	T1 T2	T2	T1			T3	T2	T1 T2	T1 T2	T2 T3

TÓPICOS

- 1 – Integrada (faz parte do texto principal)
 2 – Local: L1 (introdução)
 L2 (meio)
 L3 (final)
 L4 (nota rodapé ou canto de página)
 L5 (exercício)
 L6 (leitura complementar)
 3 – Tipo: T1 (biografia)
 T2 (contextualizada)
 T3 (problematizadora)

Integrações (outras áreas) – livros x tópicos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	IT (1) D (1)	D (2) IT (1) IC (3)	IT (2) IC (3)		D (1) IT (2) IC (2)		IT (2) IC (2)		IT (3)	IT (2)			IT (2) D (1) IC (1)	IT (4)	IT (2) IC (2)	IT (1) IC (1)	D (2)
2	IT (1) D (1)	IT (2) IC (2)	IT (1) IC (2)		D (1) IT (1) IC (2)					IT (1) IC (2)			IT (1)	D (1) IT (1) IC (1)	IT (1) IC (2) IC (1)	IT (2) IC (1)	
3	IT (1) D (1)	IT (2) IC (1)	IC (2)	IT (1)	IC (2)					IT (1)			IT (1) IC (1)	D (1) IT (1) IC (1)	IC (2)	IT (1)	
4		IC (1)	IT (1) IC (3)		IC (2)		IC (1)	IC (2)	IC (1)	IC (1)		IC (1)	IC (1)	IT (1) IC (1)	IT (1) IC (1)	IT (2)	
5	IT (2)	IC (2)	IC (2)		IC (2)		IC (1)			IC (1)					IT (1)		
6	D (1) IT (2)	IC (2)	IT (2) IC (2)							D (1) IT (2)			IT (2)	D (2) IC (1)			IT (1)
7	D (1)																D (1)
8													IC (3) IT (5)	IT (1) IC (2)			D (1)
9									IC (4)	IC (1)			IT (1) IC (1)	D (2) IT (6)	IT (1) IC (2)	IT (1)	
10		IT (1) IC (2)	IC (1)		IC (1)		IC (1)	IC (1)	IC (1)						IC (2)		
11							IT (1)		IT (1)	IC (2)			IT (1) IC (2)	IT (1) IC (1)			
12								IC (1)									
13								IC (1)	IT (1)	IT (1)			IT (1)	IC (1)			
14										IT (1)							
15										IT (1)							
16														IC (1)			
17														IC (1)			IT (1)

TÓPICOS

1 – Juros compostos	10 – Intensidade de terremotos
2 – Crescimento de bactérias	11 – Meio ambiente
3 – pH	12 – Espiral logarítmica
4 – Escala Richter	13 – Linha de produção
5 – Intensidade sonora	14 – Lançamento de foguetes
6 – Crescimento populacional	15 – Bits (informática)
7 – Aresta de um cubo	16 – Alometria
8 – Meia vida	17 – Temperatura
9 – Desintegração de substâncias	

LEGENDA: As integrações foram catalogadas, segundo a forma de apresentação no capítulo.
D: Direta (exemplo, exercício resolvido, faz parte do texto)
IT: Indireto no Texto (exercícios propostos para resolução entre partes do texto)
IC: Indireto Complementar (exercícios fora do texto, opcionais)

Texto – livros x tópicos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	LE1	
2	LV1 (20) LV2 (3) LV3 (3)	LV1 (7) LV2 (15) LV3 (7)	LV2 (12) LV3 (2)	LV2 (6) LV3 (2)	LV1 (2) LV2 (13) LV3 (7)	LV2 (14) LV3 (2)	LV1 (4) LV2 (13) LV3 (6)	LV1 (3) LV2 (23) LV3 (2)	LV1 (4) LV2 (11) LV3 (5)	LV1 (3) LV2 (36) LV3 (8)	LV2 (6) LV3 (2)	LV2 (12) LV3 (2)	LV1 (1) LV2 (26) LV3 (6)	LV1 (5) LV2 (21) LV3 (9)	LV1 (1) LV2 (12) LV3 (3)	LV1 (1) LV2 (12) LV3 (3)	LV1 (4) LV2 (8) LV3 (2)	LV2 (1) LV3 (8)
3	LS1	LS2	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	LS1	
4	C3	C3	C3	C1	C3	C1	C3	C3	C3	C3	C3	C3	C3	C3	C2	C2	C2	
5	R2	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	R1	

TÓPICOS

1 – Linguagem escrita: LE1 (direcionado ao leitor) LE2 (sem relação com o leitor)
2 – Linguagem visual: LV1 (desenhos e figuras ilustrativas) LV2 (gráficos, desenhos e figuras explicativas) LV3 (tabelas)
3 – Linguagem simbólica: LS1 (rigorosa – uso correto) LS2 (não rigorosa)
4 – Cores: C1 (uma cor) C2 (duas cores) C3 (várias cores)
5 – Relações: R1 (LV e LS integrado a LE) R2 (LV e LS não integrado a LE)

Relações – livros x tópicos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1					X								X	X			
2	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	X												X	X			
4	X	X	X			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5														X			

TÓPICOS

1 – PA e PG
2 – Potência
3 – Equação Exponencial
4 – Função Exponencial
5 – Geometria (área da hipérbole)

Seqüência (tema precedente) – livros x tópicos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	X		X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
2		X															
3						X											
4																	X

TÓPICOS

- | |
|---|
| 1 – Função Exponencial
2 – Equação Exponencial
3 – Inequação Exponencial
4 – Potências de 10 |
|---|

Seqüência (tema posterior) – livros x tópicos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	X																
2		X						X	X	X	X	X					
3			X			X								X	X		
4				X													
5					X												
6							X										
7								X					X				
8																	X

TÓPICOS

- | |
|--|
| 1 – Porcentagem
2 – Progressões
3 – Trigonometria
4 – Funções Circulares
5 – Função Modular
6 – Composição e inversão de funções
7 – Matemática Financeira
8 – Unidades de volume |
|--|